На правах рукописи

Меленцов Александр Александрович

О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ КЛАССА $W_p^{\alpha}([0,1]^2)$ БИЛИНЕЙНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Специальность 01.01.01–математический анализ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

ЕКАТЕРИНБУРГ – 2007

Работа выполнена на кафедре высшей математики ГОУ ВПО «Российский государственный профессионально-педагогический университет»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Черных Николай Иванович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
старший научный сотрудник
Шевалдин Валерий Трифонович,
Институт математики и механики УрО РАН,

кандидат физико-математических наук
Глазырина Полина Юрьевна,
ГОУ ВПО «Уральский государственный университет им. А.М. Горького»

Ведущая организация:
ГОУ ВПО « Челябинский государственный университет»

Защита диссертации состоится 24.10. 2007 г. в 15 ч. 00 м. на заседании диссертационного совета К 212.286.01 по присуждению ученой степени кандидата физико-математических наук при ГОУ ВПО «Уральский государственный университет им. А.М. Горького» по адресу:
620063, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51, комн. 248.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ГОУ ВПО «Уральский государственный университет им. А.М. Горького»

Автореферат разослан __________ 2007 года.

Ученый секретарь
диссертационного Совета
доктор физико-математических наук
профессор В.Г. Пименов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

В теории приближений традиционной является задача приближения функций *f*, объединенных в некоторый функциональный класс *F*, полиномами $\sum_{s=1}^{M} c_s\varphi_s(x)$ с постоянными коэффициентами и задача вычисления или оценки величины $\tau_M(F) = \sup_{f\in F}\inf_{c_s}\left\| f - \sum_{s=1}^{M} c_s\varphi_s \right\|$.

Для функций нескольких переменных $f(x, y)$, $x \in R^n$, $y \in R^m$, начиная с 1907г., изучаются также приближения с помощью сумм произведений функций от меньшего числа переменных $g(x,y) = \sum_{s=1}^{M}\varphi_s(x)\psi_s(y)$, называемых билинейными функциями порядка *M*, которые формально можно считать полиномами порядка *M* по *x* с переменными коэффициентами.

Первый результат по приближению билинейными функциями был получен Е.Шмидтом, который в 1907 г. изучал наилучшие приближения периодических функций двух переменных суммами произведений функций одной переменной в L_2. В. Н. Темляковым в ряде работ найдены порядки приближения $\tau_M(F)_q$ в метрике L_q классов F дифференцируемых периодических функций $f(x,y)$ многих переменных

$$\tau_M(F)_q = \sup_{f\in F}\inf_{\substack{u_i(x),\, v_i(y)\\ i=1,\dots,M}}\left\| f(x,y) - \sum_{i=1}^{M} u_i(x)v_i(y)\right\|_q \qquad (1 \le q \le \infty)$$

билинейными функциями $\sum_{i=1}^{M} u_i(x)v_i(y)$ для классов $W^{\bar{r}}_{p,\alpha}$, $SW^{r}_{p,\alpha}$, $H^{\bar{r}}_{p}$ и NH^{r}_{p} периодических функций, определенных ограничениями на соответствующие частные производные или ограничениями на соответствующие допредельные разности. Такие оценки им получены также в различных смешанных нормах для соответствующих классов Соболева и Никольского.

В работах М.-Б.А.Бабаева в конце 80-х — в 90-х годах получены оценки сверху скорости приближения функций соболевского класса $W_P^{\alpha}(I^m)$ в метрике $L_q(I^m)$ на m-мерном кубе $I^m = [0,1]^m$ билинейными функциями порядка M и найден порядок величины $\tau_M(W_p^{\alpha})$ при $1 \le p \le q \le \infty$ и $M \to \infty$.

Настоящая работа продолжает исследования в данном направлении.

Цель работы.

Цель работы —для всех допустимых p и q разработать конструктивный метод построения оптимальных билинейных функций для любой функции $f \in W_p^{\alpha}(I^2)$, получить неулучшаемую по порядку относительно M оценку сверху при $0 < q \le p \le \infty$ наилучших приближений

$$E_M\left(f, g\right)_q = \inf_{\substack{\varphi_i(x_1),\, \psi_i(x_2) \\ (i=1,\dots,M)}} \left\| f(x_1, x_2) - \sum_{i=1}^{M} \varphi_i(x_1)\psi_i(x_2) \right\|_{L_q(I^2)}$$

функции двух переменных $f(x_1, x_2)$ класса $W_p^{\alpha}(I^2)$ билинейными функциями порядка M

$$g(x) = g_M(x) = \sum_{s=1}^{M} \varphi_s(x_1)\psi_s(x_2) \tag{1}$$

класса G_M, а также обосновать использование построенного аппарата приближения при решении интегральных уравнений второго рода.

Методы исследования.

При получении результатов использованы методы теории приближения функций, функционального анализа, методы решения интегральных уравнений.

Научная новизна. Предложен новый, конструктивный метод построения аппроксимирующих билинейных функций $g_M(x, f)$ для $f \in W_p^{\alpha}(I^2)$ при всех допустимых p и q. Получена оценка сверху наилучших приближений функции f класса $W_p^{\alpha}(I^2)$ билинейными функциями при $0 < q \le p \le \infty$, неулучшаемая по порядку относительно $M \to \infty$ на классе $W_p^{\alpha}(I^2)$. Предложен метод приближенного решения интегральных уравнений Фредгольма с гладким ядром на базе разработанного метода аппроксимации, особенно выгодный, когда поведение ядра существенно неоднородно в разных частях квадрата I^2.

Теоретическая и практическая ценность. Предложенный новый, конструктивный метод построения билинейных функций $g_M(x, f)$ представляет теоретический и практический интерес. Он позволил получить оценку погрешности приближения функций класса $W_p^\alpha(I^2)$ билинейными функциями заданного порядка при $0 < q \le p \le \infty$ и разработать метод приближенного решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода с помощью замены невырожденного ядра, принадлежащего классу $W_p^\alpha(I^2)$, на соответствующую билинейную функцию. В работе получена оценка точности соответствующих приближенных решений.

Основные результаты.

Пусть $f \in W_p^\alpha(I^2)$, $I^2 = [0,1]^2$, g — билинейная функция (1) класса G_M. $E_M(f,g)_q = \inf\limits_{\substack{\varphi_i(x_1),\psi_i(x_2)\\ i=1,\dots,M}} \left\| f(x_1,x_2) - \sum\limits_{i=1}^{M} \varphi_i(x_1)\psi_i(x_2) \right\|_{L_q(I^2)}$ — наилучшие приближения функции f билинейными функциями g. В главе 1 построена новая конструкция билинейных функций $g_M(x) = g_M(x, f)$, аппроксимирующих в $L_q(I^2)$ функции $f \in W_p^\alpha(I^2)$, позволяющая при любых значениях $0 < q \le \infty,\ 1 \le p \le \infty$, $\frac{\alpha}{2} > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, α — натуральное выбирать $g_M(x, f)$ так, что $\|f - g_M\|_{L_q(I^2)}$ имеет порядок убывания при $M \to \infty$, совпадающий с $\tau_M(W_p^\alpha(I^2))_q$. На этой основе изучен вопрос о скорости наилучших приближений $E_M(f, g)_q$ функций соболевского класса $W_p^\alpha(I^2)$ в метрике $L_q(I^2)$ на квадрате $I^2 = [0,1] \times [0,1]$ билинейными функциями порядка M при $M \to \infty$ в случае $0 < q \le p,\ 1 \le p \le \infty$, $\frac{\alpha}{2} > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ и получена оценка сверху

$$E_M(f, g)_q \le \|f(x) - g_M(x, f)\|_{L_q(I^2)} \le \frac{C}{M^\alpha} \|f\|_{L_p^\alpha(I^2)}, \qquad (2)$$

где $C = C(p, q, \alpha)$ — некоторая положительная константа (теорема 1).

В главе 2 в теореме 2 показано, что полученная оценка не улучшаема по порядку при $M \to \infty$.

В главе 3 при решении интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$y(x) = \lambda \int_0^1 K(x,s) y(s) ds + f(x) \tag{3}$$

с ядром $K = K(x,s) \in W_p^\alpha(I^2)$ по методу Шмидта с помощью замены ядра на соответствующую билинейную функцию в теореме 3 получена оценка погрешности приближенного решения $\overline{y}$ этого уравнения с помощью данного метода.

Доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $1 \le q \le p \le \infty$, $\frac{\alpha}{2} > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда *если* $B = 1 - |\lambda| \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 |K|^r ds \right)^{\frac{q}{r}} dx \right)^{\frac{1}{q}} > 0$, *то существует константа C, зависящая только от p, q и α, такая, что* $\left\| y - \overline{y} \right\|_q \le \frac{C}{M^\alpha} |\lambda| \left\| \overline{y} \right\|_r \left\| K \right\|_{L_p^\alpha(I^2)} B^{-1}$.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-4]. Все результаты, вошедшие в диссертацию, получены автором самостоятельно.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы. Общий объем работы составляет 71 страницу, библиография содержит 16 наименований.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на

- научных семинарах в Институте математики и механики УрО РАН (руководители: доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, профессор Субботин Ю.Н., доктор физико-математических наук, профессор Черных Н. И.);

- научных семинарах на кафедре математического анализа Уральского государственного университета им. А.М. Горького (руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Арестов В.В.);
- научных семинарах на кафедре высшей математики РГППУ (руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Верещагин В.П.).
- Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 05-01-00409.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность темы исследований, сформулирована цель диссертационной работы и пути ее достижения, отмечена новизна и значение работы.

В главе 1 построена новая конструкция билинейных функций $g_M(x) = g_M(x, f)$, аппроксимирующих в $L_q(I^2)$ функции $f \in W_p^\alpha(I^2)$, позволяющая при любых значениях $0 < q \le \infty,\ 1 \le p \le \infty$, $\frac{\alpha}{2} > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, α — натуральное выбирать $g_M(x, f)$ так, что $\|f - g_M\|_{L_q(I^2)}$ имеет порядок убывания при $M \to \infty$, совпадающий с $\tau_M(W_p^\alpha(I^2))_q$. На этой основе изучен вопрос о скорости наилучших приближений $E_M(f, g)_q$ функций соболевского класса $W_p^\alpha(I^2)$ в метрике $L_q(I^2)$ на квадрате $I^2 = [0,1] \times [0,1]$ билинейными функциями порядка M при $M \to \infty$ в случае $0 < q \le p,\ 1 \le p \le \infty$, $\frac{\alpha}{2} > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ и получена оценка сверху

$$E_M(f, g)_q \le \|f(x) - g_M(x, f)\|_{L_q(I^2)} \le \frac{C}{M^\alpha} \|f\|_{L_p^\alpha(I^2)}, \tag{2}$$

где $C = C(p, q, \alpha)$ — некоторая положительная константа (теорема 1).

Аналогичная оценка получена и при $p \le q$, повторяющая результат М.-Б.А.Бабаева

В главе 2 в теореме 2 доказано, что оценка (2) на всем классе $W_p^{\alpha}(I^2)$ при $0 < q \le p,\ 1 \le p \le \infty$, $\frac{\alpha}{2} > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ точна по порядку относительно переменной M при $M \to \infty$.

Напомним определение класса $W_p^{\alpha}(I^2)$ для $\alpha \in \boldsymbol{N}$ и $1 \le p \le \infty$.

Пусть τ_1 и τ_2 − целые неотрицательные числа. Оператор дифференцирования в пространстве функций двух переменных обозначим как

$$D^{\tau} = \frac{\partial^{|\tau|}}{\partial x_1^{\tau_1} \partial x_2^{\tau_2}},$$

где $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ и $|\tau| = \tau_1 + \tau_2$, τ_1, τ_2 — целые, неотрицательные числа.

В дальнейшем будем использовать еще такое обозначение

$$\sum_{|k|=\alpha} \left| D^k f(x) \right|^p = D_{\alpha,p} f(x).$$

При $1 \le p < \infty$ функция $f(x)$ принадлежит $W_p^{\alpha}(I^2)$, если она интегрируема в p- й степени на I^2 вместе со своими обобщенными в смысле Соболева производными порядка α.

При $p = \infty$ функция $f(x)$ принадлежит $W_p^{\alpha}(I^2)$, если она вместе со своими обобщенными производными порядка α существенно ограничена на I^2, т.е. $f \in W_{\infty}^{\alpha}(I^2)$, если каждой обобщенной производной $D^n f$, $n = (n_1, n_2)$, $n_1 + n_2 = \alpha$, соответствует число $A > 0$ такое, что неравенство $|D^n f(x)| \le A$ имеет место почти всюду на I^2.

Норма элемента f пространства $W_p^{\alpha}(I^2)$ при $1 \le p \le \infty$ определяется следующим образом:

$$\| f \|_{W_p^{\alpha}(I^2)} = \| f \|_{L_p(I^2)} + \| f \|_{L_p^{\alpha}(I^2)},$$

где при $1 \le p < \infty$

$$\| f \|_{L_p(I^2)} = \| f \|_p = \left(\int_{I^2} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\| f \|_{L_p^\alpha(I^2)} = \left(\sum_{|\tau|=\alpha} \int_{I^2} | D^\tau f(x) |^p \, dx \right)^{1/p},$$

а при $p = \infty$

$$\| f \|_{L_\infty(I^2)} = ess \sup_{x \in I^2} \{ | f(x) | \},$$

$$\| f \|_{L_\infty^\alpha(I^2)} = ess \sup_{x \in I^2} \sum_{|\tau|=\alpha} | D^\tau f(x) |.$$

Для вывода основных результатов в главе 1 получен ряд вспомогательных утверждений. Для того, чтобы сформулировать лемму 1.1, проведем ряд вспомогательных построений.

Разобьем квадрат I^2 на K прямоугольников следующим образом (см. рисунок 1).

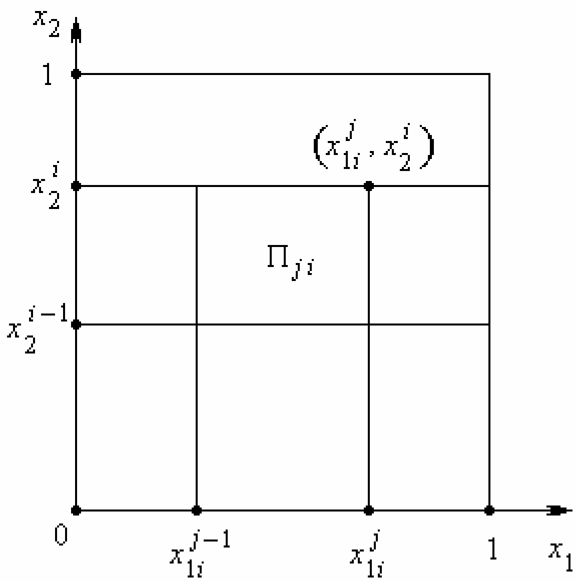

Рис.1

Сначала отрезок $[0,1]$ на оси Ox_2 разобьем точками $\{x_2^i\}_{i=0}^N$ на промежутки: по определению полагаем $x_2^0 = 0,\ x_2^N = 1$,

$$\Delta x_2^i = \left(x_2^{i-1}, x_2^i \right] \quad (i = 2,3,\ldots,N) \quad \text{и} \quad \Delta x_2^1 = \left[x_2^0, x_2^1 \right].$$

Длину каждого промежутка обозначим, как обычно, $\left|\Delta x_2^i\right| = x_2^i - x_2^{i-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$. Пусть $R_N^{(2)} = \left\{\Delta x_2^i\right\}_{i=1}^N$ – совокупность всех промежутков.

Каждой точке множества $\left\{x_2^i\right\}_{i=1}^N$ поставим в соответствие разбиение промежутка $0 \le x_1 \le 1$ точками $\left\{x_{1i}^j\right\}_{j=0}^{N_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ на N_i промежутков Δx_{1i}^j. Причем $x_{1i}^0 = 0, x_{1i}^{N_i} = 1$ при $i = 1, \ldots, N$. Кроме того, полагаем $\Delta x_{1i}^1 = \left[x_{1i}^0, x_{1i}^1\right]$, $\Delta x_{1i}^j = \left(x_{1i}^{j-1}, x_{1i}^j\right]$ для $j = 2, 3, \ldots, N_i$ и $\left|\Delta x_{1i}^j\right| = x_{1i}^j - x_{1i}^{j-1}$ $(j = 1, \ldots, N_i)$.

Обозначим через Π_i прямоугольник (полосу)

$$\Pi_i = \left\{(x_1, x_2) \,\middle|\, 0 \le x_1 \le 1,\ x_2 \in \Delta x_2^i\right\},$$

а через Π_{ji} – прямоугольник

$$\Pi_{ji} = \left\{(x_1, x_2) \,\middle|\, x_1 \in \Delta x_{1i}^j,\ x_2 \in \Delta x_2^i\right\}.$$

Ясно, что

$$\bigcup_{j=1}^{N_i} \Pi_{ji} = \Pi_i \quad (i = 1, 2, \ldots, N), \quad \bigcup_{i=1}^{N} \Pi_i = I^2 .$$

Кроме того, отметим, что

$$\Pi_{ji} \cap \Pi_{j'i'} = \begin{cases} \Pi_{ji} & \text{при } j = j' \text{ и } i = i' \\ \varnothing & \text{при } j \ne j' \text{ или } i \ne i' \end{cases}.$$

Отсюда следует, что множество прямоугольников $\{\Pi_{ji}\}$ является разбиением основного квадрата I^2. Легко видеть, что число элементов разбиения равно сумме $K = \sum_{i=1}^{N} N_i$. Обозначим построенное разбиение через R_K^N:

$$R_K^N = \left\{\Pi_{ji}\right\}_{j=1, i=1}^{N_i, N}. \qquad (4)$$

Зададим теперь на каждом прямоугольнике Π_{ji} фиксированный многочлен степени $l = \alpha - 1$ по совокупности переменных:

$$P_{\Pi_{ji}}(x) = \sum_{k, |k| \le l} C_k^{ji} x^k ,$$

где для мультииндекса $k = (k_1, k_2) \in Z_+^2$ под нормой $|k|$ понимается величина

$|k|=k_1+k_2$ и полагается $x^k = x_1^{k_1}x_2^{k_2}$. Таким образом, в развернутом виде $P_{\Pi_{ji}}(x)$ можно записать так:

$$P_{\Pi_{ji}}(x) = \sum_{0\le k_1+k_2\le l} C^{ji}_{k_1k_2} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \,. \qquad (5)$$

Зададим на квадрате I^2 кусочно-полиномиальную функцию $T_K(x)$, совпадающую на каждом прямоугольнике Π_{ji} с выбранным многочленом вида (5).

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1.1. *Пусть* R_K^N *– разбиение квадрата* I^2 *на* N *полос* Π_i *прямыми, параллельными оси* Ox_1*, с последующим разбиением каждой полосы на произвольное число* N_i *прямоугольников* Π_{ji} $(j=1,\ldots,N_i)$. *Пусть* $T_K(x)$ *– кусочно-полиномиальная функция, заданная на разбиении* R_K^N*, на каждом прямоугольнике* Π_{ji} *совпадающая с некоторым многочленом* $P_{\Pi_{ji}}(x)$ *вида* (5) *степени* $l=\alpha-1$ *по совокупности переменных. Тогда* $T_K(x)$ *принадлежит классу* G_M *билинейных функций вида* (1)*, где* $M=N(l+1)$.

В § 1.3 главы 1 доказана лемма 2.1.

Лемма 2.1. *Для каждой функции* $f(x)\in W_p^{\alpha}(I^2)$, $(1\le p\le\infty,\quad \alpha\in\mathbf{N})$ *и каждого прямоугольника* $\Pi=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\subset I^2$ *существуют многочлен* $(P_\Pi f)(x)$ *степени* $l=\alpha-1$ *и конечная константа* $C=C(p,q,\alpha)$ *такие, что при любых* p, $1\le p<\infty$, *и любых* q, *удовлетворяющих условиям* $\frac{1}{q}>\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{2}$, $0<q\le\infty$, *выполняется неравенство*

$$\| f-P_\Pi f\|_{L_q(\Pi)} \le C\,|\Pi|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\iint_\Pi \sum_{\tau_1+\tau_2=\alpha} |D^\tau f(x)|^p \ (b_1-a_1)^{\tau_1 p}(b_2-a_2)^{\tau_2 p}\ dx_1dx_2 \right)^{1/p},$$

а при $p=\infty$ *– неравенство*

$$\| f-P_\Pi f\|_{L_q(\Pi)} \le C\,|\Pi|^{\frac{1}{q}}\ ess\sup_{x\in\Pi} \sum_{|\tau|=\alpha} |D^\tau f(x)|\,(b_1-a_1)^{\tau_1}(b_2-a_2)^{\tau_2} \ .$$

Результатом § 1.4 является лемма 3.1.

Лемма 3.1. *Для любого разбиения* R_K^N (4) *квадрата* I^2, *любой функции* $f(x)\in W_p^\alpha(I^2)$ *и функции* $g_M(x,f)\in G_M$, *определяемой на каждом прямоугольнике* $\Pi_{ji}\in R_K^N$ *по функции* $f(x)$ *в соответствии с леммой* 2.1, *справедливы следующие оценки*

при $1\le p<\infty$ *и* $0<q<\infty$

$$\| f(x)-g_M(x,f)\|_{L_q(I^2)}\le$$

$$\le C\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_i}\sum_{|\tau|=\alpha}\left|\Delta x_{1i}^j\right|^{\left(\tau_1+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)q}\left|\Delta x_2^i\right|^{\left(\tau_2+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)q}\left(\iint_{\Pi_{ji}} D_{\alpha,p}f(x)\,dx\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{6}$$

при $0<q<\infty$, $p=\infty$

$$\| f(x)-g_M(x,f)\|_{L_q(I^2)}\le C_1\left(\sum_{|\tau|=\alpha}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_i}\left|\Delta x_{1i}^j\right|^{\left(\tau_1+\frac{1}{q}\right)q}\left|\Delta x_2^i\right|^{\left(\tau_2+\frac{1}{q}\right)q}\| D_{\alpha,1}f(x)\|_{L_\infty(\Pi_{ji})}^q\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{7}$$

при $p=q=\infty$

$$\| f(x)-g_M(x,f)\|_{L_\infty(I^2)}\le C\sum_{|\tau|=\alpha}\max_{\substack{1\le j<N_i\\ 1\le i\le N}}\left|\Delta x_{1i}^j\right|^{\tau_1}\left|\Delta x_2^i\right|^{\tau_2}\| D_{\alpha,1}f\|_{L_\infty(\Pi_{ji})}, \tag{8}$$

где C, C_1, C_2 — *постоянные, зависящие только от* p, q *и* α.

Таким образом, при $0<q\le\infty,\ 1\le p\le\infty$ задача построения функции $g_M(x,f)$, доставляющей наилучший порядок аппроксимации и вывод оценки величины

$$E_M((f,g)_q=\inf\left\{\| f-g_M\|_{L_q(I^2)} \mid g_M\in G_M\cap L_q(I^2)\right\}$$

для каждой функции $f(x)\in W_p^\alpha(I^2)$ и каждого $M\ge\alpha$ при $\| f\|_{L_p^\alpha(I^2)}\ne 0$ сведена к задаче минимизации правой части неравенства (6) при $0<q<\infty$, $1\le p\le\infty$ и неравенства (8) при $p=q=\infty$ соответственно по всевозможным разбиениям R_K^N квадрата I^2 с фиксированным числом N интервалов Δx_2^i. (В случае $\| f\|_{L_p^\alpha(I^2)}=0$ все тривиально: $E_M((f,g)=0)$.

В § 1.5 и 1.6 предлагается рекуррентный метод разбиения квадрата I^2 на полосы и прямоугольники соответственно таким образом, что при

$0 < q \le \infty$, $1 \le p \le \infty$

$$|\Delta x_2^i|^{\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}+\alpha\right)} \| f \|_{L_p^\alpha(\Pi_i)} \le N^{-\left(\frac{1}{q}+\alpha\right)} \| f \|_{L_p^\alpha(I^2)}, \qquad i = 1,\ldots,\overline{N}, \quad \overline{N} \le N \tag{9}$$

(здесь полагаем $\frac{1}{q} = 0$ при $q = \infty$ и $\frac{1}{p} = 0$ при $p = \infty$)

и при $0 < q < \infty$, $1 \le p < \infty$

$$\left|\Delta x_{1i}^s\right|^{\left(-\frac{1}{p}+\tau_1\right)q} \left(\int_{\Delta x_{1i}^s(\tau_1)} dx_1 \int_{\Delta x_2^i} D_{\alpha,p} f(x) dx_2\right)^{\frac{q}{p}} \le \left|\Delta x_2^i\right|^{\tau_1 q} \left(\int_0^1 dx_1 \int_{\Delta x_2^i} D_{\alpha,p} f(x) dx_2\right)^{\frac{q}{p}}, \tag{10}$$

а при $0 < q \le \infty, \quad p = \infty$

$$\left|\Delta x_{1i}^s\right|^{\tau_1} \mathop{ess\,sup}_{\substack{x_1 \in \Delta x_{1i}^s \\ x_2 \in \Delta x_2^i}} D_{\alpha,1} f(x_1, x_2) \le \left|\Delta x_2^i\right|^{\tau_1} \| f \|_{L_\infty^\alpha(\Pi_i^N)}. \tag{11}$$

Теперь для любой функции $f(x) \in W_p^\alpha(I^2)$ легко строится билинейная функция $g_M(x, f)$, заданная на всем I^2. Вначале по алгоритму, предложенному в § 1.5 и 1.6, разобьем квадрат I^2 на полосы Π_i, $i=1,\ldots,\overline{N}$, $\overline{N} \le N$, и прямоугольники Π_{ji} так, что будут выполняться неравенства (9), (10) при $p \ne \infty$, $q \ne \infty$ либо (9), (11) при $0 < q \le \infty, \quad p = \infty$. Для полученного разбиения R_K^N квадрата I^2 построим кусочно-полиномиальную функцию степени $l = \alpha - 1$, удовлетворяющую леммам 2.1 и 3.1. Согласно лемме 1.1 эта функция принадлежит классу G_M билинейных функций вида (1), где $M = N(l+1)$. Это и есть искомая функция $g_M(x, f)$. Подставляя оценки (10) и (11) в правые части неравенств (6), (7) и (8), соответственно, в случае $0 < q \le p,\ 1 \le p \le \infty$, $\quad \frac{\alpha}{2} > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ после некоторых преобразований для $f(x) \in W_p^\alpha(I^2)$ получим оценку

$$\left\| f(x) - g_M(x, f) \right\|_{L_q(I^2)} \le \frac{C}{M^\alpha} \left\| f \right\|_{L_p(I^2)},$$

а при $1 \le p \le q < \infty$ — оценку

$$\left\| f(x) - g_M(x, f) \right\|_{L_q(I^2)} \le C \left\| f \right\|_{L_p(I^2)} \frac{M^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}{M^\alpha},$$

где C — постоянная, зависящая только от p, q, α, а при $\frac{\alpha}{2} > \frac{1}{p}$ зависящая только от p и α.

Таким методом в § 1.7 на основе полученных лемм выводятся основные результаты первой главы.

Отметим, что как видно из приведенных выше формулировок лемм, они позволяют строить аппроксимирующую билинейную функцию по функции $f(x) \in W_p^\alpha(I^2)$ и в случае $1 \le p \le q \le \infty$, $\frac{\alpha}{2} > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. Однако оценки для $E_M(f, g)_q$, совпадающие по порядку с выписанной выше оценкой величины $\|f - g_M\|_{L_q(I^2)}$, получены ранее в работах Бабаева 1991, 1992, 1997 годов (даже для функций любого числа переменных).

Теорема 1. *Пусть* $0 < q \le p$, $1 \le p \le \infty$ *и* α — *натуральное число,* $\frac{\alpha}{2} > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. *Существует константа* $0 < C = C(p, q, \alpha) < \infty$, *зависящая только от указанных параметров, такая, что для любой функции* $f(x)$ *класса* $W_p^\alpha(I^2)$ *и построенной в леммах 1.1-5.1 функции* $g_M(x) = g_M(x, f)$ *справедливо неравенство*

$$\|f(x) - g_M(x, f)\|_{L_q(I^2)} \le \frac{C}{M^\alpha} \| f \|_{L_p^\alpha(I^2)}.$$

При $1 \le p \le q \le \infty$ *для соответствующей функции* $g_M(x, f)$ *справедливо неравенство*

$$\|f(x) - g_M(x, f)\|_{L_q(I^2)} \le C \frac{M^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}}{M^\alpha} \| f \|_{L_p^\alpha(I^2)}.$$

Для функций двух переменных полученное автором доказательство, в отличие от методов М.-Б. А. Бабаева, более конструктивно, и его легко реализовать в виде вычислительного алгоритма построения аппроксимирующей функции $g_M(x, f)$ для каждого M и каждой функции $f(x) \in W_p^\alpha(I^2)$.

В <u>главе 2</u> приводится простое доказательство того, что полученная оценка при $0 < q \le p,\ 1 \le p \le \infty$ так же точна по порядку при $M \to \infty$.

В <u>главе 3</u> рассматривается интегральное уравнение Фредгольма второго рода (3)

$$y(x) = \lambda \int_0^1 K(x,s) y(s) ds + f(x),$$

где функция $K(x,s)$ принадлежит соболевскому классу $W_p^{\alpha}(I^2), 1 \le p \le \infty$, $\alpha \in \mathbf{N}$, *f(x)* принадлежит пространству $L_q[0,1]$, $0 < q \le \infty$.

Для функции $K(x,s)$ по предложенному в главе 1 алгоритму строится билинейная функция $\overline{K}(x,s)$, аппроксимирующая ядро $K(x,s)$ в $L_q(I^2)$ с погрешностью

$$\left\| K(x,s) - \overline{K}(x,s) \right\|_{L_q(I^2)} \le \frac{C}{M^{\alpha}} \left\| K(x,s) \right\|_{L_p^{\alpha}(I^2)},$$

и оценивается погрешность приближенного решения $\overline{y}$ интегрального уравнения, найденного методом замены ядра $K(x,s)$ на вырожденное ядро $\overline{K}(x,s)$. Полученный результат формулируется в следующей теореме

<u>Теорема 3</u>. *Пусть* $1 \le q \le p \le \infty$, $\frac{\alpha}{2} > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда *если* $B = 1 - |\lambda| \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 |K|^r ds \right)^{\frac{q}{r}} dx \right)^{\frac{1}{q}} > 0$, *то существует константа C, зависящая только от p, q и α, такая, что* $\left\| y - \overline{y} \right\|_q \le \frac{C}{M^{\alpha}} |\lambda| \left\| \overline{y} \right\|_r \left\| K \right\|_{L_p^{\alpha}(I^2)} B^{-1}$.

Отметим, что рассматриваемый метод решения интегральных уравнений фактически основан на кусочно-полиномиальной аппроксимации ядра, которая с помощью леммы 1.1 превращается в аппроксимацию билинейными функциями.

В <u>главе 4</u> рассмотрен случай, когда функция $K(x,s)$ принадлежит соболевскому классу $W_p^{\alpha}(I^2)$, где $\alpha = 2$, $1 \le p < \infty$. Поэтому *l*=1 и можно ограничиться кусочно-линейной аппроксимацией. При этом задача решения интегрального уравнения с вырожденным ядром $\overline{K}(x,s)$, как обычно, сводится к решению системы линейных уравнений. Погрешность решения интегрального уравнения при рассмотренной замене ядра на вырожденное удовлетворяет неравенству

$$\left\| y - \overline{y} \right\|_q \le \frac{R}{M^2}, \text{ где } R = C|\lambda| \left\| \overline{y} \right\|_r \|K\|_{L_p^2(I^2)} B^{-1}. \tag{12}$$

В главе 4 разработан алгоритм приближенного решения интегрального уравнения (3), обеспечивающий точность (12), который заключается в следующем:

1. По рекуррентным соотношениям определяются значения $x_i, \quad i = 1,\dots,N$ для разбиения квадрата на полосы прямыми $x = x_i, \quad i = 0,\dots,N$.
2. По рекуррентным соотношениям определяются значения s_{ij} для разбиения каждой полосы $x_i \le x \le x_{i+1}, \quad i = 0,\dots,N-1$ на прямоугольники прямыми $s = s_{ij}$.
3. На каждом прямоугольнике полученного разбиения ядро $K(x,s)$ заменяется линейной функцией двух переменных, которая строится путем разложения $K(x,s)$ по формуле Тейлора первого порядка с центром в средней точке прямоугольника. Таким образом производится замена ядра билинейной функцией на основе линейных сплайнов, а построенное приближенное решение $\overline{y}$ интегрального уравнения (3) удовлетворяет оценке (12), где $M = 2N$.

Алгоритм реализован на ЭВМ, и приведены примеры, позволяющие сравнить точное решение интегрального уравнения (3) с приближенным.

В заключение выражаю искреннюю глубокую благодарность моему научному руководителю Николаю Ивановичу Черных, а также Виталию Владимировичу Арестову и Юрию Николаевичу Субботину за поддержку и проявленный интерес к моим исследованиям.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статья, опубликованная в ведущем рецензируемом научном журнале

1. *Меленцов А.А.* Приближения функций класса $W_p^\alpha([0,1]^2)$ билинейными функциями // Изв. Уральского университета. 2004. № 30. Математика и механика. Вып.6. С.90 – 116.

Другие публикации:

2. *Меленцов А.А.*, Приближения функций класса $W_p^\alpha(I^2)$ билинейными формами // Профессионально-педагогическое образование: Сб. науч. тр. Ч.2. Исследования в предметных и методических областях. Екатеринбург, 1995. С.22−32.
3. *Меленцов А.А.* О точности оценок приближения функций соболевского класса $W_p^\alpha([0,1]^2)$ билинейными функциями // Сборник научных трудов. Проблемы электроэнергетики, машиностроения и образования. Изд.РГППУ. Екатеринбург. 2005. С. 102-110.
4. *Меленцов А.А.* Оценка приближенного решения интегрального уравнения**,** полученного заменой ядра класса $W_p{}^\alpha$ билинейной функцией // Сборник научных трудов. Проблемы электроэнергетики, машиностроения и образования. Изд.РГППУ. Екатеринбург. 2005. вып. 2. С. 14-21.